Revue des sciences de l'éducation

Quelles situations fondamentales pour l'apprentissage de la géométrie?

Ruhal Floris

Volume 22, numéro 2, 1996

Les apprentissages mathématiques en situation

URI : https://id.erudit.org/iderudit/031885ar
DOI : https://doi.org/10.7202/031885ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Floris, R. (1996). Quelles situations fondamentales pour l'apprentissage de la géométrie? *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 365–389. https://doi.org/10.7202/031885ar

Résumé de l'article

Cet article présente une étude exploratoire sur l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire et sur ses effets à long terme. Il rapporte d'abord l'analyse, faite à partir du concept de situation, de différentes présentations d'une connaissance géométrique: le parallélisme de deux droites, dans des manuels anciens et nouveaux et à différents niveaux d'enseignement. Il compare ensuite les résultats d'une expérience proposée à 20 élèves de lycée, qui ont été amenés à traiter des problèmes de façon empirique, aux résultats obtenus par un traitement théorique. Les résultats de la classe montrent que, dans un contexte non prototypique, les élèves ne parviennent pas à utiliser sans aide ce qu'ils ont appris.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n° 2, 1996, p. 365 à 389

Quelles situations fondamentales pour l'apprentissage de la géométrie?

Ruhal Floris
Chargé d'enseignement
Université de Genève

Résumé – Cet article présente une étude exploratoire sur l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire et sur ses effets à long terme. Il rapporte d'abord l'analyse, faite à partir du concept de situation, de différentes présentations d'une connaissance géométrique: le parallélisme de deux droites, dans des manuels anciens et nouveaux et à différents niveaux d'enseignement. Il compare ensuite les résultats d'une expérience proposée à 20 élèves de lycée, qui ont été amenés à traiter des problèmes de façon empirique, aux résultats obtenus par un traitement théorique. Les résultats de la classe montrent que, dans un contexte non prototypique, les élèves ne parviennent pas à utiliser sans aide ce qu'ils ont appris.

Introduction

La géométrie prend ses racines comme une science de l'espace. L'exposé axiomatique lui donne les moyens de se couper de ces racines, mais l'intuition du chercheur et le travail de l'apprenant ne semblent pas possibles sans exploration spatiale, ne fût-ce que par de simples croquis (Gonseth, 1945; Mercier et Tonnelle, 1991). Si les connaissances du mathématicien lui permettent généralement de maîtriser ce retour au concret, certains élèves ont de la difficulté à s'en détacher. Ainsi que l'ont montré différentes recherches (par exemple, Berthelot et Salin, 1992; Chevallard et Jullien, 1990; Noirfalise, 1993), ce phénomène est favorisé par l'organisation actuelle de l'enseignement de la géométrie à l'école obligatoire, à Genève et en France en tout cas.

Le travail que nous présentons ici est une enquête didactique sur cet enseignement et sur ses effets à long terme[1]. Notre méthode de recherche a consisté d'une part à analyser, à partir du concept de situation, différentes présentations d'une connaissance géométrique: le parallélisme de deux droites, dans des manuels anciens et nouveaux et dans différents ordres d'enseignement. L'objectif de cette double mise en perspective diachronique, dans l'histoire de l'enseignement et dans celle de l'élève, était de comparer les différentes solutions apportées au problème de la relation de la géométrie avec le sensible. D'autre part, nous avons proposé à des élèves de lycée des problèmes dont le traitement empirique – par le dessin – produit des résultats différents de ceux obtenus par un traitement théorique, ceci afin d'étudier leurs rapports à la géométrie et les potentialités d'évolution de ces rapports selon l'organisation des situations didactiques mises en place.

Dans ce texte, nous distinguons enseignement et apprentissage. La didactique des mathématiques étudie l'enseignement et les conditions nécessaires de l'apprentissage des mathématiques. Selon nous, la question de la suffisance de ces conditions n'est pas dans le champ de la didactique. L'élève a la liberté de ne pas apprendre. D'autres champs de recherche essayent de comprendre l'usage qu'il fait de cette liberté. La didactique se donne le projet de déterminer si les conditions qui lui sont faites auraient pu lui permettre d'apprendre. La thèse de Mercier (1992) est une remarquable étude de cette problématique.

L'enseignement de la géométrie entre théorie et situation

Dans ce paragraphe, nous illustrerons notre propos en nous centrant sur la notion de parallélisme entre deux droites. À Genève, comme dans beaucoup d'autres lieux, c'est sur une présentation de type euclidien qu'était basé, jusque dans les années soixante, l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire. D'ailleurs, le texte d'Euclide était encore utilisé en Angleterre au siècle dernier. Les manuels employés reprenaient parfois presque mot pour mot les définitions d'Euclide: «Des droites parallèles sont celles qui, étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas ni d'un côté ni de l'autre» (Euclide, 1990). «Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont situées dans un même plan, et ne se rencontrent pas, à quelque distance qu'on les prolonge» (Bertrand, 1890, 1934).

Nous nous référons, dans ce second cas, à un manuel rédigé par un professeur du Collège de Genève (secondaire supérieur). Il est étonnant de constater la stabilité de la définition de droites parallèles d'une édition à l'autre du manuel. En y regardant de plus près, on constate cependant que, pour la troisième édition de 1934 («pareille à la deuxième» est-il précisé), Bertrand modifie les paragraphes précédant cette définition. En effet, en 1890, il avait introduit dans son texte le terme de «distance», qui n'apparaît pas chez Euclide. C'est d'ailleurs la première apparition de ce mot dans le manuel. Dans l'édition suivante, il a donc été conduit à introduire un paragraphe intitulé «mesure» où la distance est définie comme la longueur d'une droite (comme chez Euclide, le mot droite signifie ici segment de droite). Dans l'exemple qu'il prend pour illustrer la théorie de la transposition didactique, Chevallard (1985, p. 154 ss) étudie précisément le concept de distance et il montre le statut ambigu de l'utilisation de ce terme dans un autre manuel du début du siècle. L'évolution entre les deux éditions du manuel de Bertrand illustre bien la lente transformation de l'emploi du mot distance, du langage commun vers une définition plus mathématique, mais prenant un tout autre sens que celui donné par Fréchet dans le contexte des espaces de fonctions où il s'agit de mesurer la plus ou moins grande ressemblance entre les fonctions selon les critères intégrés dans la définition adoptée (Fréchet, 1906). Ceci n'est pas le cas de la distance géométrique où deux objets éloignés peuvent être identiques, par exemple deux points.

Ce type de définition euclidienne n'est pas très opératoire. Pour décider du parallélisme de deux droites données, il faudrait les prolonger indéfiniment et se convaincre qu'elles ne peuvent se rencontrer. D'où la nécessité de trouver d'autres critères qui font intervenir une sécante et l'égalité des angles alternes/internes. Comme on le voit, la théorie géométrique ne fournit pas de définition simple de l'objet parallélisme de deux droites. Comment alors peut-on présenter celui-ci à des élèves? Mercier (1994) parle de rencontre *in absentia* avec le savoir, l'opposant à la rencontre *in situ*, c'est-à-dire dans le cadre de la résolution d'un problème dans lequel le savoir en question joue un rôle crucial, rejoignant ainsi la théorisation didactique par le concept de situation fondamentale: «Le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale [...]» (Brousseau, 1986).

Quels sont les problèmes dans lesquels il est nécessaire d'envisager le parallélisme de deux droites ou de deux segments de droites? On peut penser que ce critère apparaît comme un outil nécessaire dans toutes les questions de détermination de distances qui ne sont pas directement mesurables. On le retrouve sans doute également dans de nombreux problèmes architecturaux (alignement de colonnades, allée de statues, etc.).

Dès que l'on songe à un enseignement qui ne soit pas un simple exposé d'une présentation axiomatique du savoir, il s'agit de mettre en scène une rencontre *in situ*. Comment donc mettre en situation, pour un apprenant, l'objet parallélisme de deux droites? Il paraît difficile de reprendre tels quels des problèmes dans lesquels les anciens ont rencontré historiquement la notion de parallélisme. Le maître va alors proposer des problèmes ayant une analogie fonctionnelle avec les problèmes historiques. Considérons l'activité suivante: prendre une feuille de papier aux bords déchirés et la plier de façon à obtenir un parallélogramme.

Si le caractère crucial du parallélisme n'est pas contestable ici, il pourrait sembler que l'on ait un cercle vicieux puisque l'on parle déjà de parallélogramme pour une activité de première rencontre avec le parallélisme. On pourrait éventuellement montrer aux élèves un parallélogramme en carton et leur demander de réaliser par pliage un objet ayant la même forme. En réalité, le cercle vicieux n'est pas vraiment contourné. Car si l'on veut que l'élève détermine lui-même s'il a effectivement produit un parallélogramme, il doit avoir un critère de jugement, une certaine connaissance préalable de l'objet. Ce paradoxe rend difficile toute mise en scène effective d'une situation fondamentale et il est le moteur de divers phénomènes tendant à modifier le sens de l'activité. On a appelé «transposition didactique» ces transformations, des problèmes originels aux activités métaphoriques du maître, puis aux mutations de celles-ci sous l'effet du cercle vicieux décrit ci-dessus, soit la nécessité de devoir proposer à l'élève un milieu qui lui permet de définir d'abord ses buts et ensuite d'avoir le contrôle de son action.

Le sens des situations

Dans le cas de la géométrie à l'école primaire, l'enseignant s'appuie beaucoup sur la perception pour donner à l'élève certains moyens d'action en situation. L'élève reconnaîtra des formes, il les recopiera. En ce qui concerne les parallèles, les exemples «naturels» ne manquent pas: rails de chemin de fer, côtés d'une table ou d'un livre, etc. Mais quelles sont les limites de ces moyens d'action? Demandons à des élèves de 12 ans de déterminer le parallélisme de deux segments de droites tracés comme sur la figure 1, sur une feuille non rectangulaire.

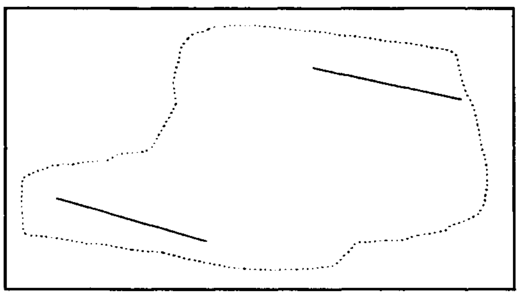


Figure 1 – Segments parallèles

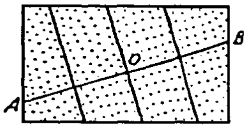
L'éloignement des segments, la disposition particulière, l'absence de bords rectilignes sont autant de variables de situation qui vont rendre difficile, voire impossible, toute résolution du problème basée sur la perception. Nous avions d'ailleurs pris appui sur ce point dans une séquence d'enseignement comportant des situations informatisées et portant sur l'équation fonctionnelle de la droite dans le plan (Bevacqua et Floris, 1989; Floris, Gruner et Rochat, 1991). Nous utilisions l'impossibilité pour l'élève de se fier uniquement à la perception, ceci afin de le conduire à utiliser une caractérisation d'ordre vectoriel. Stratégie de résolution qui revient à s'appuyer sur un quadrillage, absent dans l'exemple étudié ici. Comment pourrait alors procéder un élève devant la tâche proposée? De quelle autre stratégie dispose-t-il? On peut imaginer qu'il ait peut-être appris à construire des parallèles en faisant glisser une équerre le long d'une règle, mais le procédé ne s'avère pas utilisable sans adaptation, dans le cas présent. Il faut d'abord prolonger l'un des deux segments. En outre, demander si des segments donnés sont parallèles n'est pas une question habituelle: il n'y a pratiquement rien de semblable dans les manuels utilisés en sixième et en septième à Genève[2]. On demandera parfois si telle figure est un parallélogramme, ce qui est différent, et l'on se satisfera sans doute d'une réponse perceptive. Afin de bien comprendre la différence entre les deux situations, reprenons l'exercice de pliage du parallélogramme que nous avons cité plus haut. Le point de vue perceptif ne donne pas d'éléments pour l'effectuer. Il faut utiliser, au moins en acte, le fait que, étant donné une droite (un premier pli), une perpendiculaire d'une perpendiculaire à cette droite est parallèle à la première droite. Quant à la détermination par pliage de la perpendiculaire à une droite, elle se justifie par son statut d'axe de symétrie. Dans cet exemple, «les connaissances mathématiques sont inscrites dans les gestes nécessaires à la construction» et non dans un objet ou dans une figure. La perception n'est utile qu'à la fin du travail, comme moyen de contrôle.

Lorsque nous évoquons le sens d'une connaissance mathématique, nous nous reportons ainsi à la classe de situations dans lesquelles elle est efficace. Défini comme perpendiculaire à une perpendiculaire, le parallélisme peut être associé aux problèmes présentés ici. Si l'élève ne parvient pas à traiter ces problèmes, nous disons que le sens, pour lui, du savoir parallélisme de deux segments est limité par rapport au sens mathématique.

C'est ainsi que cet objet de savoir pourra être réétudié à l'école secondaire, où l'on donnera du parallélisme une propriété plus opératoire: «deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont perpendiculaires à une même droite»[3]. Nous y reviendrons plus loin.

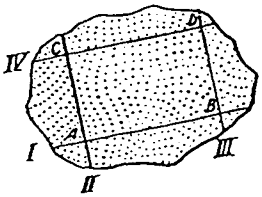
La transformation des situations

Au premier paragraphe, nous avons évoqué une des raisons qui rend la transposition didactique inévitable, et tout particulièrement la nécessité de toujours commencer par du connu (Chevallard, 1985). Nous continuons à nous appuyer sur l'exercice de pliage d'un parallélogramme. L'exercice est difficile, voire impossible, pour un élève de quatrième ou de cinquième primaire. On peut alors se rabattre sur le pliage préalable d'un rectangle. Ce pliage s'appuie sur des connaissances à propos de l'angle droit, connaissances qui peuvent rester implicites. Le maître doit faire l'hypothèse qu'elles sont à la disposition des élèves auxquels il propose ce problème. Pour le contrôle du résultat, le maître peut s'appuyer sur le sens critique – perceptif – des élèves. Ce qui n'est pas possible avec des élèves plus jeunes, qui se contentent de plier à peu près et d'obtenir un à peu près rectangle. La gestion de ce travail repose donc sur des connaissances admises chez l'élève et sur un maître qui en fait l'hypothèse, acceptant de consacrer du temps à ce travail. Sans cela, le maître montre aux élèves comment effectuer le pliage, il leur épargne ainsi l'utilisation de connaissances mathématiques. C'est ainsi que nous avons pu suivre l'évolution d'activités de pliage, dits «travaux constructifs», dans une série de manuels genevois du début du siècle (Corbaz, 1901, 1926) et constater l'apparition, dans la dernière édition, de croquis expliquant la façon de procéder (figure 2).



78 – Pliez une feuille rectangulaire suivant la droite AB (inclinée). Portez A sur B et faites le pli qui passe en O; faites de même deux autres plis en portant A et B sur O. Les trois plis sont parallèles; pourquoi?

79 – Pliez une feuille ayant un bord droit pour obtenir un angle de 3 quarts de tour; un angle de 3 huitièmes de tour; marquez les traits au crayon.



80 – Pour obtenir un rectangle dans une feuille à bords irréguliers, suivez l'ordre indiqué.

Figure 2 – Extrait du manuel de Corbaz, édition 1926

La situation n'intègre alors plus de connaissances mathématiques et elle peut être abandonnée: l'auteur suivant reprend les pliages dans la partie théorique puis, dans les années soixante-dix, ces activités finissent par disparaître presque complètement. Elles sont remplacées par des constructions de polygones à l'aide de bandes de cartons articulées (figure 3) ou recyclées pour l'étude de la symétrie orthogonale. Or, là encore, avec ce type de matérialisation, on tend à intégrer dans l'objet les connaissances mathématiques en jeu.

Avec des bandes de carton fort et des attaches parisiennes, ou mieux, avec les pièces d'un jeu de construction, réalise ce quadrilatère articulé.

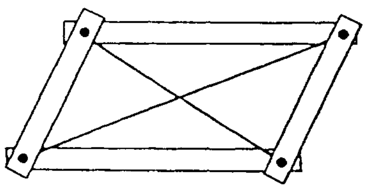


Figure 3 – Extrait du manuel de sixième actuellement utilisé en Suisse romande (Chastellain, Jaquet et Michlig, 1985)

Mais quelle logique sous-tend cette transformation des situations? C'est dans les caractéristiques de leur transmission que nous pouvons trouver des éléments de réponse à cette importante question. Les indications données dans un manuel ne suffisent pas à décrire la situation dans toute sa densité. Nous sommes conduit à considérer plusieurs niveaux de fonctionnement, que Brousseau (1988) a décrits comme «structuration du milieu». Les termes de base d'un niveau de milieu sont des couples (situation, connaissance). Il appelle «milieu objectif» l'énoncé de l'exercice, par exemple celui du pliage d'un parallélogramme et les connaissances mathématiques nécessaires afin de donner une réponse objective, celle reconnue comme correcte dans l'institution envisagée. Dans le cas du parallélogramme, la connaissance objective pertinente est «deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles». Ceci dit, l'élève va maintenant agir, transiter dans un «milieu d'action». Pour cela, il doit disposer de moyens de traduire en gestes certaines données de la consigne, d'avoir une stratégie de base. Le terme perpendiculaire peut rappeler un autre milieu dans lequel il saura comment obtenir deux perpendiculaires par pliage. Par exemple en évoquant une situation précédemment jouée dans laquelle il aura dû obtenir un rectangle par pliage. On le voit, si cette formalisation a sa part d'arbitraire comme toute formalisation, elle permet de produire immédiatement des questions: pour chaque élément du milieu, quelle action possible pour l'élève, en liaison avec quelles connaissances et avec quelles autres situations? Nous renvoyons aux travaux de Centeno (1995) et de Margolinas (1994) pour des exemples d'analyse en termes de milieu (voir aussi Floris, Brun, et Leutenegger, 1994).

Une fois que l'action de l'élève aboutit, qu'il obtient un résultat, ce dernier doit être vérifié. Dans le cas où le milieu fournit à l'élève des critères de vérification, on transite vers un «milieu d'apprentissage». Dans le cas du problème analysé ici, une évaluation perceptive est possible. Le contrôle du résultat est alors un contrôle par le sens (Portugais, 1992), mais un sens d'ordre culturel et non mathématique. Mais si l'élève ne prend pas cette responsabilité, laissant celle-ci à l'enseignant, nous retrouvons le «milieu didactique» qui était celui dans lequel le problème a été posé. On le voit bien avec cette analyse, le rôle du milieu et l'attitude de l'enseignant sont cruciaux. Si ce dernier ne peut pas s'appuyer sur des stratégies de base (l'élève ne sait que faire) ni sur des moyens de validation (l'élève ne sait pas comment évaluer son résultat), il devra bien fournir lui-même la bonne réponse et les moyens d'y arriver (Margolinas, 1993). On le voit, les conditions permettant d'éviter ce contrôle des actes sont difficiles à obtenir; d'où un glissement des situations vers une anticipation de ces contrôles par l'enseignant, par le manuel et par la disparition du milieu d'apprentissage comme nous pouvons le constater dans les situations proposées dans la quatrième édition du manuel de géométrie de Corbaz (1926). En outre, au sujet de la validation, l'activité de pliage s'appuie sur la perception, qui n'est pas un rapport mathématique. Ce dernier ne pourra être installé que lorsque les connaissances mathématiques implicites, dans la méthode de pliage, seront transformées en critères explicites de validation par un travail de formulation lié à l'exercice des segments parallèles éloignés, par exemple[4]. Il y a donc là un paradoxe fondamental de l'enseignement de la géométrie: l'intuition doit s'appuyer sur un rapport à des objets prototypiques, mais ceci peut alors empêcher l'évolution vers un rapport mathématique à ces objets. On constate ainsi dans la scolarité primaire ce que Chevallard et Jullien (1990) définissent comme une solution empiriste de ce paradoxe: les objets géométriques s'identifient à leurs représentations graphiques.

Comment construire les objets géométriques?

À l'école secondaire, l'un des objectifs déclaré de l'enseignement de la géométrie est de parvenir à une étude plus abstraite. Mais voyons comment l'institution elle-même s'exprime dans un rapport de son centre de recherches psychopédagogiques:

> Différents arguments, d'ordres pédagogique aussi bien que psychologique ou historique, semblent indiquer que la géométrie constitue une voie privilégiée pour accéder à cet univers en apparence aride (et aux yeux de beaucoup hostile) qu'est celui du raisonnement mathématique. C'est notamment le lien quasi inévitable que la géométrie établit entre représentation et opérations abstraites d'une part, représentations et actions «concrètes» d'autre part, qui nous semble constituer sa caractéristique la plus remarquable. En effet, dans la plupart des cas, l'élève peut opérer avec le support auxiliaire d'une figure ou d'un objet qui permet plus facilement de repérer les éléments à traiter, de les comparer, de les combiner, etc.; ou d'envisager différentes formes de vérification et de contrôle.
>
> Selon ce point de vue, nous considérons d'emblée comme dépourvue d'intérêt pédagogique (au moins dans la phase initiale de l'apprentissage) l'idée selon laquelle le dessin d'une droite n'est pas une droite, le dessin d'un carré n'est pas un carré, etc. En adoptant une perspective plus proche de la situation de l'apprenant que des exigences formelles de la discipline, nous considérons que, pour l'élève débutant, le dessin du carré est un carré, les propriétés mises en évidence à l'aide du dessin sont les propriétés du carré, etc. À partir d'une telle approche, et par une démarche d'abstraction progressive, l'élève parviendra peu à peu à considérer le carré et ses attributs comme ayant une existence et un statut indépendants de tel ou tel dessin particulier, représentation imparfaite de l'objet géométrique abstrait et «idéal» (Pini, Lorenz et Emery, 1993).

Arrêtons-nous sur le dernier point. Les auteurs du rapport ne sont pas les seuls à préconiser l'apparition progressive de l'objet géométrique abstrait. Dans la thèse de De Block-Docq (1992), nous trouvons l'extrait de dialogue suivant:

Le professeur	Un point n'a pas de longueur. Considérons un polygone régulier avec beaucoup, beaucoup de côtés. Un côté est tout petit, petit. Est-ce qu'il y a une infinité de côtés?
Des élèves	Non.
Le professeur	Je peux encore le diminuer. Si je multiplie par deux le nombre de côtés, j'ai un côté encore plus petit. Et je peux encore multiplier par deux le nombre de côtés et ainsi de suite. Donc, je n'aurai jamais fini.
Un élève	Et on n'arrivera jamais à zéro.
Le professeur	Pourtant, on peut imaginer le cercle. Et, dans le cercle, est-ce que j'ai encore des côtés à proprement parler?
Un élève	C'est dingue! Bizarre! Mais c'est pas normal.
Le professeur	C'est vrai, on ne peut pas mesurer, mais on peut penser. Vous ne devez pas vous en faire pour ça. Petit à petit, pas encore cette année-ci, vous comprendrez bien cela. C'est vrai que c'est bizarre. Mais vous verrez, ça va bien.

Un élève	Vous dites qu'on ne peut pas dessiner, mais en fait on peut.
Le professeur	Même avec un crayon bien taillé, tu fais une petite tache, pas un point. Mais un point, tu peux le penser. Vous verrez, cela viendra petit à petit. L'idée d'un point comme cela vous paraîtra moins anormale.

En opposition à cette idée d'un développement naturel de l'abstraction géométrique, Barbin (1993) affirme de son côté que «Dans le processus de la pensée géométrique, tout est à construire; il n'y a pas d'objets géométriques dans le réel ni de logique mathématique innée et tout est à mettre en place en même temps, la construction des objets géométriques et la construction des raisonnements».

Quel est le choix effectué par les auteurs du manuel de géométrie employé par les élèves de septième année à Genève? Proposent-ils une construction théorique comme le suggère ci-dessus Barbin ou aménagent-ils une progression sans solution de continuité? L'examen du manuel, *Mathématiques 7e – Géométrie* (Cycle d'orientation de l'enseignement secondaire, 1991), nous permet de constater que la finalité des activités que l'on y trouve est cohérente avec le texte de Pini *et al.* (1993), cité précédemment. On demande aux élèves d'effectuer des constructions et d'en tirer des règles géométriques. Tout se passe comme si celles-ci pouvaient toutes être déduites du dessin. Voici deux exemples d'exercices.

1) La droite A étant tracée, on demande à l'élève (exercice 4, p. 18): dessiner quatre droites B, C, D, E telles que $A \perp B$, $B \perp C$, $C \perp D$, $D \perp E$. Que constate-t-on?

2) Les deux points s et r sont symbolisés par deux croix, on demande à l'élève (exercice 57, p. 34): dessiner un point t équidistant de r et de s. Y a-t-il plusieurs possibilités? Si oui, les dessiner (Cycle d'orientation de l'enseignement secondaire, 1991).

Le premier exercice doit faire découvrir à l'élève que plusieurs droites perpendiculaires à une droite donnée sont parallèles. La réponse est basée sur un constat de perception à appliquer sur l'image finale et non sur l'utilisation de règles. Pour l'élève qui commencerait à jouer le jeu géométrique, le second exercice le ramène au dessin par sa dernière question et, s'il se maintient dans l'abstrait, il pourra répondre, comme nous l'avons observé, qu'il ne peut pas dessiner tous ces points, car il y en a une infinité. Cette réponse d'élève symbolise bien la difficulté des rapports à la géométrie à ce niveau, balancement perpétuel entre la réalité dessinée et le schéma conventionnel, représentant les objets théoriques du mathématicien (idéaux).

Le manuel utilisé à Genève laisse donc à la charge du maître le travail de cette construction épistémologique. Ce résultat vient confirmer diverses études de manuels français (Berthelot et Salin, 1992; Mercier et Tonnelle, 1992; Noirfalise, 1993). Afin de mettre en perspective le cas du manuel genevois, nous avons examiné un manuel français de sixième année réalisé par l'IREM-Strasbourg (1986). Nous observons là aussi un recours très marqué aux observations empiriques, sans prise en charge explicite du rapport à la théorie. En effet, on trouve dans la section «cours»: «À la règle, tracer une droite (une partie seulement, car une droite est en principe illimitée...) demande un peu de soin (crayons taillés...), si on veut que la droite passe par deux points donnés» (p. 23) et, toujours dans la partie «cours», sous le titre «Symétrique d'une droite et applications»:

> Considérons deux droites perpendiculaires à une même droite. Elles ne peuvent pas avoir de point d'intersection A. Sinon, elles devraient alors toutes deux passer par le symétrique B de A, et seraient donc confondues. On appelle parallèles des droites qui ne se coupent pas (et sécantes des droites qui ont un point d'intersection), et nous retiendrons: «Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles» (p. 196).

L'explicitation des propriétés est ici assumée par le manuel, ce qui n'est pas le cas dans le manuel genevois. Mais le travail de passage de la géométrie dessinée à une géométrie théorique est quelque peu escamoté entre le début et la fin du manuel et on ne trouve nulle part d'activités spécifiques à ce propos. Noirfalise (1993) analyse finement ces questions à propos d'un exercice analogue dans un autre manuel. Ainsi, nous pouvons conclure que, si l'enseignant ne s'en tient qu'au manuel, la mise en place de rapports adéquats – nous entendons par rapports adéquats ceux du mathématicien – de l'élève à la figure géométrique est laissée à un mystérieux processus d'abstraction, ce qui revient à dire que c'est à l'élève seul de prendre ce travail en charge. Laissons-leur le temps de le faire et observons les effets de cette délégation de responsabilité trois ans plus tard dans le curriculum.

Du côté de l'élève

Analysons les réponses des élèves dans les différentes situations qui leur sont proposées au niveau gymnasial[5]. Lors d'un test, nous proposons à ces élèves de 15-16 ans la question suivante.

Peut-on tracer les triangles déterminés (définis) par les données fournies ci-dessous? Si oui, construire le triangle et si non, donner une explication. Ne pas effacer les traits de construction!

(a) AB = 7,7 cm,	angle BAC (en A) de 66°,	BC = 7 cm.
(b) AB = 3 cm,	BC = 4 cm,	AC = 8 cm.
(c) AB = 9,1 cm,	BC = 4,2 cm,	AC = 4,9 cm.

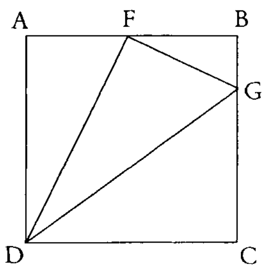
Et nous constatons que près de la moitié des élèves répondent oui au point (c) et ils construisent un triangle non aplati. Ce résultat s'est répété avec quatre classes – pour un total de près de cent élèves –, dans certains cas, avec une question un peu différente portant sur la valeur de l'aire des triangles à considérer (Arsac, 1994; Verkerk, 1990).

Quant aux autres élèves, une grande partie d'entre eux se bornent à tracer un segment, sans expliquer leurs réponses. Dans ce cas, seule une minorité d'élèves semble être parvenue à considérer «le triangle et ses attributs comme ayant une existence et un statut indépendants de tel ou tel dessin particulier, représentation imparfaite de l'objet géométrique abstrait et idéal». D'où la question: comment ces élèves y sont-ils parvenus et pourquoi pas les autres?[6]

Ce problème ne présente pas une singularité isolée. Il est très révélateur de la gestion des résultats tirés d'un dessin. D'autres questions très standards pour des élèves de cet âge les amèneront à se demander, voire à demander explicitement, si un dessin suffit pour donner une réponse. Citons-en quatre, fournies par des enseignants.

1) Les points A (3;5), B (6;3) et C (8;1,65) sont-ils alignés?

2) La figure ABCD ci-contre est un carré de côté de 12 unités. La longueur de DF est de 13 unités. La longueur de BG est de 3 unités. Le triangle DFG est-il rectangle?



3) Deux triangles isométriques étant tracés, déterminer le centre de la rotation telle que l'un des triangles soit l'image de l'autre par cette rotation.

4) Déterminer la valeur exacte de sin (30°).

Mais poursuivons notre enquête et revenons à la fin de l'école primaire. Car c'est là que se situe la «phase initiale de l'apprentissage de la géométrie»[7]. Dans le manuel de sixième année primaire (Chastellain *et al.*, 1985), nous rencontrons, dans le chapitre «Surfaces et solides», l'exercice suivant, premier exercice de construction de triangles. Il s'agit donc d'un exercice relativement important.

Deux des triangles ne sont pas constructibles et le dernier est réduit à un segment (cas du triangle aplati). Le manuel de méthodologie, destiné au maître, parle ici d'inégalité du triangle, inégalité que les élèves sont censés inférer des constructions faites. Il ne signale pas de difficulté particulière. Or, l'inférence, à partir du dessin, n'est pas possible en ce qui concerne le cas limite où le plus long côté du triangle est égal à la somme des deux autres côtés. C'est ce que montrent les résultats d'élèves décrits ci-dessus ainsi que les nombreuses observations rapportées par l'équipe travaillant autour du «problème ouvert» à Lyon (voir, par exemple, Arsac, 1994; Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard et Mante, 1992).

4. a) Construis, si possible, les triangles suivants. Toutes les mesures sont en centimètres.

– abc, tel que	mes [ab] = 10;	mes [bc] = 12;	mes [ac] = 15.
– def, tel que	mes [de] = 5;	mes [ef] = 8;	mes [df] = 20.
– ghi, tel que	mes [gh] = 5;	mes [hi] = 10;	mes [gi] = 20.
– jkll, tel que	mes [jk] = 15;	mes [kl] = 8;	mes [jl] = 20.
– mno, tel que	mes [mn] = 8;	mes [no] = 8;	mes [mo] = 16.

b) Copie et complète le tableau suivant.

triangles	mesure du plus long côté	somme des mesures des deux autres côtés	Est-il possible de construire le triangle?
abc			
def			
ghi			
jkl			
mno			

Figure 4 – Extrait du manuel de sixième actuellement utilisé en Suisse romande (Chastellain, Jaquet et Michlig, 1985)

Le fait intéressant à relever ici est que les élèves de 15 ans avaient officiellement rencontré ce problème quatre ou cinq ans auparavant. Il ne peut donc pas être considéré par l'institution comme une singularité ou comme un problème piège. Mais ce pourrait être le cas en considérant le point de vue des élèves et il faudra en discuter. Pour l'instant, nous nous bornons à constater quelques faits. Il nous a aussi paru intéressant d'effectuer un sondage chez quelques enseignants genevois de sixième année primaire au sujet du chapitre «Surfaces et solides». Nous avions posé la question suivante, à propos de l'exercice ci-dessus: Quelques élèves ont tracé le triangle mno, tandis que d'autres prétendent que ce n'est pas possible. Vous voulez convaincre le premier groupe d'élèves que ce n'est effectivement pas possible. Parmi les arguments ci-dessous, lequel ou lesquels employez-vous: 1) Vous leur dites que leurs mines de crayons ou de compas ne sont pas assez bien taillées; 2) Vous leur dites que leurs mines ne sont pas assez bien taillées et vous leur montrez comment procéder; 3) Vous leur faites une «démonstration» en utilisant des bandes de carton articulées et des attaches parisiennes; 4) Vous leur dites que c'est parce que 8 + 8 = 16 et que c'est une règle mathématique; 5) Autres. Préciser.

Sur les dix enseignants interrogés, neuf choisissent la troisième méthode, parfois en proposant de faire construire le triangle articulé par l'élève lui-même. L'un de ces neuf maîtres suggère en outre d'utiliser les compétences d'un élève plus à l'aise pour convaincre ses camarades et le dixième enseignant propose de parvenir à la règle cherchée en traçant plusieurs dessins impossibles. Or, il est impossible de démontrer ainsi, expérimentalement, l'inexistence du triangle mno de l'exercice ci-dessus. Nous laissons le lecteur essayer ou s'en convaincre sur la base du schéma ci-dessous.

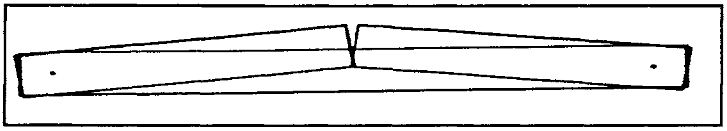
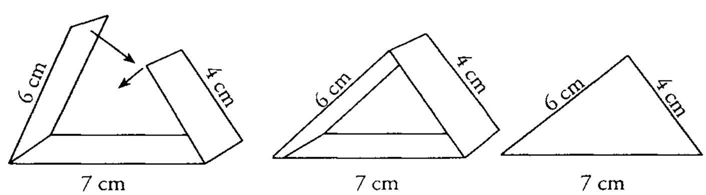


Figure 5 – Le triangle mno matérialisé par des bandes de carton

Il y aurait une autre façon de matérialiser le triangle, mais la mention d'attaches parisiennes et la présence dans le manuel actuellement utilisé d'activités analogues à propos des quadrilatères (voir plus haut figure 3) nous font supposer que les enseignants ne songent pas à une bande de carton de 32 cm que l'on plierait deux fois, à une longueur de 8 cm de chaque extrémité et qui serait, peut-être, plus convaincante et que l'on retrouve dans le manuel de 1926 de Corbaz (figure 6). En fait, pour des raisons que l'on peut également étudier mathématiquement, l'expérience ou un dessin ne peuvent fournir une réponse décisive dans ce cas (Floris, 1995).

L'ensemble de faits que nous venons de décrire et qui couvrent cinq ans de scolarité et trois types d'institutions nous autorise à affirmer que nous avons commencé à identifier un problème d'enseignement, problème derrière lequel se profile la question plus vaste, épistémologique, de la gestion des rapports entre les connaissances géométriques et la réalité matérielle concrète (triangle mathématique/triangle articulé). Peut-on proposer aux élèves des situations d'enseignement les conduisant à une évolution de ces rapports?



43 – Pliez une bande de papier fort de 17 cm de longueur en trois parties inégales (8 cm, 7 cm, 4 cm) et mettez ces longueurs en triangle. Quelle est la ligne décrite par chaque haut quand on le rabat? Quel instrument faut-il pour reporter cette construction sur la papier?

Figure 6 – Extrait du manuel de Corbaz, édition 1926

Une situation fondamentale pour la géométrie?

En reprenant les termes d'Alain Mercier, on peut affirmer que la géométrie est présentée aux élèves *in absentia*. Devant les difficultés d'une grande partie des élèves dans leur accès au monde géométrique, on peut se demander s'il serait possible de construire une entrée *in situ*. Une réflexion épistémologico-historique peut nous montrer la complexité d'un tel travail. Il n'est pas possible de reprendre cette réflexion ici et nous renvoyons à Arsac (1987). Rappelons simplement que les conditions qui ont permis le développement de la géométrie en Grèce sont très particulières, à la fois internes aux mathématiques (le problème des rapports irrationnels) et externes (les débats philosophiques). Il semble difficile de trouver une seule situation résumant ces conditions historiques. Dans le but d'étudier cette question, Brousseau (1987) a proposé une situation portant sur l'intersection des médiatrices d'un triangle.

Le professeur trace devant les élèves un triangle ABC très obtus, c'est-à-dire ayant un angle très obtus; puis, il trace les médiatrices des côtés du triangle en s'arrangeant pour que les points d'intersections respectifs forment un petit triangle A'B'C'. Il demande aux élèves de l'imiter, mais en essayant de trouver un triangle de départ XYZ pour que le triangle formé par les médiatrices soit le plus grand possible. L'activité est présentée comme un jeu: le vainqueur est celui dont le triangle X'Y'Z' est le plus grand possible sur la feuille donnée. Mais comment décider quel est ce vainqueur? Guy Brousseau propose une organisation de classe en deux groupes avec d'une part les élèves croyant avoir gagné et, d'autre part, les autres se chargeant de vérifier que les dessins ont été faits avec soin. Si un élève conteste la précision d'un dessin, il doit en proposer un autre en prenant le même triangle XYZ de départ, mais en obtenant un triangle X'Y'Z' plus petit que celui de leur camarade: il remporte alors un point, qu'il peut perdre à cause d'un troisième camarade.

Remarquons ici que sur une feuille A4, les élèves peuvent difficilement proposer un triangle ayant un angle supérieur à 170°, les médiatrices se croisant alors en dehors de la feuille. La zone de croisement est alors relativement petite. Le jeu proposé ci-dessus devrait donc converger de telle sorte que le vainqueur ait en fait un triangle très petit! Mais on se maintient toutefois dans une pratique de tracé où gagne celui qui a réussi.

Brousseau introduit alors une dimension de formulation: à la place de dessins, les élèves peuvent proposer à leurs camarades des conjectures qui seront soumises aux mêmes règles de jeu, pouvant être acceptées ou refusées par les autres. Le proposant encaisse un point par camarade convaincu. Pourrait être gagnant un élève déclarant que les côtés du triangle X'Y'Z' sont de longueur nulle. Mais, selon nous, la situation ne garantit pas forcément de telles déclarations. Certains élèves pourraient tout aussi bien déclarer, sur la foi du dessin, qu'on obtient un petit segment.

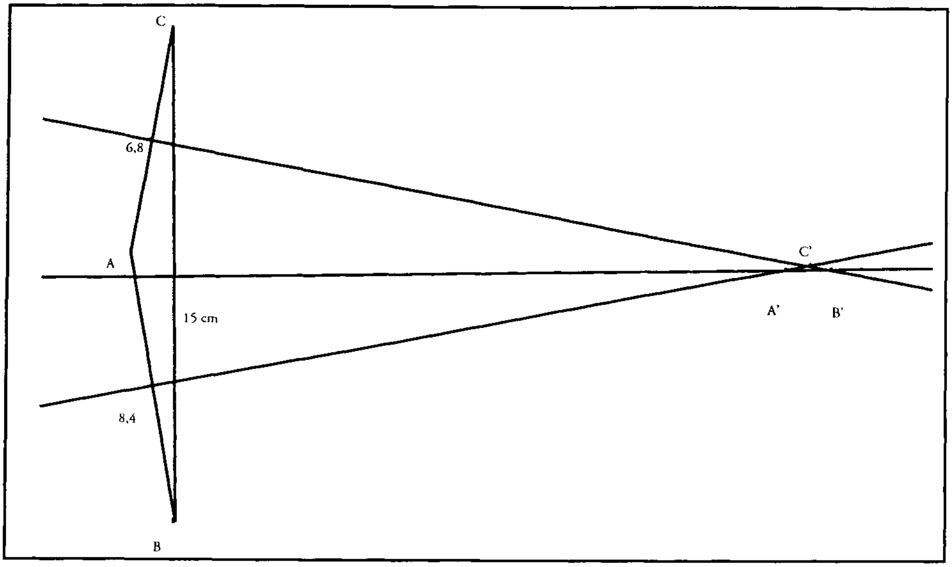


Figure 7 – Le tracé présenté aux élèves

Dans une classe ayant déjà eu l'occasion de pratiquer des débats collectifs autour d'une conjecture, à l'occasion de l'étude de la logique et avec l'activité circuit de Legrand (1990), nous avons proposé une variante de la première partie de la situation des médiatrices à des élèves de 15 ans. Notre but était de déterminer la possibilité de rompre le contrat didactique, de façon aussi nette, avec des élèves censés savoir que les médiatrices d'un triangle se coupent en un point et d'évaluer ainsi leur rapport à la géométrie dans un cas un peu particulier. En utilisant un prétest (construction d'un triangle de dimensions 9,1, 4,2 et 4,9 cm) afin de choisir un groupe formé d'élèves ayant donné des réponses opposées (tracé ou non du triangle), nous voulions également suivre l'évolution de leurs discussions, des moyens utilisés et de leur production finale ainsi que celle des autres groupes. Après avoir demandé aux élèves de tracer les médiatrices d'un triangle ABC ayant pour mesures de côtés AB: 8,4 cm; AC: 6,8 cm et BC: 15 cm, nous avons proposé un tracé au rétroprojecteur, imprécis, de telle sorte que les médiatrices forment un triangle A'B'C' comme sur la figure ci-dessus (figure 7; échelle réduite).

Nous avons ensuite indiqué que le périmètre du triangle A'B'C' était de 58 mm et nous avons réparti les élèves en groupes de quatre, composés de telle sorte que chaque groupe contienne des élèves ayant construit un triangle non aplati lors du prétest ainsi que des élèves ayant construit un segment ou ayant déclaré le triangle non constructible. La consigne était de trouver un triangle ABC tel que le triangle A'B'C' ait un périmètre le plus grand possible, ceci en utilisant une feuille de format A3.

Nous avons observé un groupe d'élèves (Sd, V, N et St) au travail pendant environ une heure. Lors du prétest décrit ci-dessus, trois de ces élèves avaient tracé un triangle non plat, tandis que St trace un segment et note: «9,1 = 4,2 + 4,9; donc, égal au même segment». Comme dans le problème du triangle aplati, on constate que le rapport des élèves au problème peut se modéliser par deux types de jeux: l'un se joue dans un milieu de propriétés et l'autre dans un milieu graphique (Arsac, 1994; Floris, 1995). Illustrons ceci par un extrait de dialogue entre deux élèves du groupe, au début de leur travail commun:

St Moi ce que je ne comprends pas, c'est pourquoi ça lui donne un triangle, en bas.

V C'est parce que ça se coupe.

St Normalement, ça doit pas faire un point?

V Pas forcément!

St Pourquoi?

(Vérifications par V sur le dessin.)

St Si tu prends une règle, ça ira mieux.

Ici, le jeu qui modélise le rapport de V se déroule plutôt dans le milieu du dessin tandis que, pour St, c'est la recherche de règles qui guide sa lecture des dessins. Mais le contexte ne lui fournit pas les moyens d'argumenter, car le maître a instauré un jeu fondé sur le graphique et ses camarades jouent déjà à ce jeu-là. Le triangle de départ, choisi par les élèves, est assez obtus, de sorte que le triangle A'B'C' n'est pas dans la feuille, ce qui conduit ensuite les élèves à se détacher quelque peu de l'activité de dessin.

(Les élèves observent St qui effectue une construction.)

N Je crois que t'auras pas assez de place... Les médiatrices plus elles vont loin, plus il est grand le triangle parce que plus l'aire est grande, plus les médiatrices, elles, se croisent à l'intérieur.

V Mm (d'approbation).

(St utilise une seconde feuille pour prolonger les médiatrices du tracé.)

St Je crois qu'il faudrait que tu me passes ta feuille pour que je continue (riant).

V (Inaudible).

N En mesurant.

V Ouais ou bien en calculant des trucs.

N Faudrait essayer de faire peut-être un rapport?

Pendant que St continue sa construction en la prolongeant sur une seconde feuille, N et V avancent l'idée d'une proportionnalité entre les côtés du triangle de départ et les longueurs des médiatrices. N mesure ces dernières et calcule ces rapports. Cela ne débouche sur rien et elle propose alors:

N Si on essayait déjà de tracer le petit triangle (celui des médiatrices) qui vaut 58 mm, on agrandit puis de trouver le grand triangle par la suite.

V Ouais, on pourrait essayer... le petit triangle, tu veux le dessiner comment?

N Ben attends, on va prendre un modèle.

Pendant un temps assez long, les élèves se livrent à des explorations, chacun de son côté ou à deux, mais sans aboutir:

N Ça va trop loin, j'en suis à deux feuilles (format A3)!

St Ça fait un tout petit triangle.

N Mais non ! Je ne suis pas encore arrivé au bout!

St (En donnant une autre feuille A3). Attends, prends ça!

St Je ne sais pas si ça te donnera quelque chose, en toute franchise.

V La précision...

St Ouais, la précision elle y est plus du tout, quoi!

Laissant N continuer une construction à partir d'un triangle très obtus, St s'est mise à effectuer une série de tracés en variant la forme des triangles ABC de départ: «À mon avis, si on fait un triangle de ce style, avec un petit machin comme ça... (à peu près rectangle, avec un côté nettement plus court que les autres)» alors que V fait des schémas de triangles presque réduits à un segment, déclarant: «Moi, je m'obstine avec mes parallèles».

Les constructions de St finissent par l'amener à douter de l'existence du triangle A'B'C':

St Vous voulez que je vous donne mon avis?

N Mmmouais.

St À mon humble avis, en fait, tous les trucs, ils devraient...

N Attends ! J'ai un problème...

Sd C'est quoi les mesures du petit?

St Pouvez vous m'expliquer pourquoi moi, je trouve que ça se rejoint tous en un point?

V Parce que t'as pris quoi?

St J'ai pris 5, 2, 4. Et pourquoi vous ça vous fait un triangle?

N Ça dépend de la grandeur, de la grosseur du triangle que tu prends.

Mais l'intervention de St ne suscite pas plus de réactions et les élèves poursuivent leur travail. C'est ainsi que Sd propose de considérer un triangle de côtés 4, 2 et 2 et en discute avec V qui admet que ça puisse faire un triangle, mais qu'il sera difficile de tracer le triangle A'B'C':

V Montre voir ton triangle de départ?

V Il est petit. Tu aurais pu encore le faire plus petit comme ça. Tu aurais encore fait plus parallèle et ça se serait quand même coupé, mais très très loin, donc, si tu fais là-dessus, ce sera parallèle.

Sd Disons que ça soit 0,1 le truc.

V Mais pourquoi? Pour que tu puisses le faire sur papier? Mais l'infini...

Sd C'est pas l'infini, 0,1!

V Non, mais ça te prendra au moins 18 feuilles jusqu'à ce que ça se coupe!

Sd Y a qu'à mettre cette idée, comme ça.

St revient alors à la charge, en riant: «Expliquez-moi pourquoi, moi, j'arrive toujours à un point?». Ses camarades ne réagissent toujours pas plus. C'est alors l'observateur qui intervient:

O Qu'est-ce qui est le plus étonnant que ça fasse un triangle ou que ça se coupe?

N Que ça fasse un triangle, c'est ça!

St Moi, à mon avis, c'est plutôt parce qu'il y a pas de précision et que c'est pour ça, que ça fait un triangle.

N C'est comme j'ai dit, je trouve qu'il y a un truc qu'est pas... , euh...

(Sourire de l'observateur.)

St Ah! ah!

(Rire franc de l'observateur.)

St Ah! je suis sûre! Ouais, c'est ça! Y a pas de précision et c'est pour ça que ça fait un triangle. C'est vrai, suivant ce qu'on fait euh...

N Ben non quand même !

Un peu plus tard, V déclare à St: «C'est peut-être pas bête, ton idée!». Sa réflexion le conduit alors à penser au cercle circonscrit:

V Et mais c'est pas vrai St, donne voir ton compas, s'il te plaît? Parce que... quand on... Je ne sais pas si... Ça fait pas le cercle?

St Encore une fois, j'arrive à un point. Central.

N Ça fait le cercle!

V Donc, c'est un manque de précision. Ça commence à m'étonner, ce truc.

St Je te dis, je suis big intelligente, hein?

N Pourquoi?

V Ouais, parce que, la dernière fois, on avait fait avec les médiatrices, puis ça... attends voir... C'est quoi qui donnait le cercle exinscrit... enfin ex...?

N Ben les médiatrices!

V Et ben donc!

(N se met alors à construire un grand triangle aigu, les médiatrices des côtés; puis, elle trace le cercle circonscrit. Elle fait ensuite de même avec un triangle obtus.)

V arrive donc à relier l'idée de St à la construction du cercle circonscrit qui avait été vue en classe la semaine précédente et N commence à être convaincue. Elle a cependant besoin d'une confirmation qu'elle va chercher dans le dessin (preuve pragmatique au sens de Balacheff, 1987). St essaye de la convaincre de l'imprécision de sa construction:

N C'est pas possible que ce soit un manque de précision!

St Tu regardes, là... Là, c'est déjà pas un angle droit!

N résiste encore un peu, cherchant une preuve définitive en faisant une construction très précise, et elle finit par se rallier à la position de V et de St. Le travail des groupes fut suivi d'une présentation à l'ensemble de la classe et les trois conjectures suivantes purent être dégagées:

Première conjecture	Les angles du triangle A'B'C' sont les mêmes que ceux du triangle ABC.
Deuxième conjecture	Il n'y a pas de triangles A'B'C'.
Troisième conjecture	Lorsque les médiatrices se rencontrent à l'intérieur du triangle ABC, le triangle A'B'C' devient un point. À l'extérieur, il existe.

Lors d'une leçon suivante, les groupes d'élèves ont dû prendre position sur ces conjectures. La deuxième conjecture, celle du groupe observé, n'a pas emporté l'adhésion de l'ensemble des élèves à l'exception de certains, plus particulièrement ceux qui avaient suivi un enseignement de la géométrie de type plus euclidien[8], comme V. Deux groupes estiment que les première et troisième conjectures sont vraies et que la deuxième est fausse; l'un de ces groupes note cependant que la réponse dépend de la précision du dessin.

Comment aurait évolué le groupe observé sans les interventions des adultes? Il est assez difficile de le dire. Nous possédons quelques indices à l'appui de l'hypothèse selon laquelle le groupe ne se serait pas mis d'accord sur le résultat ou, en tout cas, pas si rapidement. Remarquons tout d'abord que ce groupe fut le seul à parvenir à la deuxième conjecture, que St était déjà intervenue plusieurs fois sans succès, au début du travail commun. En outre, du point de vue de la pratique graphique, l'obtention d'un triangle presque proportionnel est le résultat le plus probable: l'obtention d'un point n'est réalisable qu'en pensée, avec des droites sans épaisseur. Il est difficile pour les élèves de considérer de telles droites idéales à partir de tracés se coupant très obliquement. St identifie d'ailleurs bien ce problème lorsqu'elle essaye de convaincre N: «T'as un croisement qui est comme ça; qu'est-ce que t'en sais que c'est là, que c'est là ou que c'est là?». Et c'est ici que nous trouvons un écho à long terme des rapports à la géométrie, institués en sixième année. Pour justifier qu'une droite est définie par la donnée de deux points, le manuel consulté se réfère à une pratique graphique: tracer deux points au crayon et tracer la droite. Dans ce cas, la propriété géométrique se rapporte aux gestes possibles: indétermination avec un seul point, détermination avec deux points (mais aussi avec trois points à peu près alignés et c'est là que se situe le problème; ainsi trois points non alignés peuvent faire partie de la même droite car les élèves prennent l'habitude de «tirer» la droite un peu épaisse, lors de l'ajustement de deux points avec la règle, qui est toujours assez délicat).

Il nous apparaît raisonnable de prédire une impossibilité de conclure pendant assez longtemps lorsque le maître (ou l'observateur) n'intervient pas. Nous retrouvons ici une observation d'Arsac et de Mante (1988) ainsi que de Floris (1995) à propos du problème du triangle aplati.

On remarque avec les interventions de V, élève provenant d'un autre canton, où la géométrie est enseignée de façon plus intensive qu'à Genève, que pour lui l'objet «parallélisme de deux droites» n'est pas stabilisé dans toutes les situations possibles. Dans le cas qui nous occupe, si le triangle est aplati, les droites sont parallèles, car perpendiculaires à un même segment et elles ne se coupent pas, selon la définition du parallélisme donnée dans les manuels d'avant la réforme des années soixante. Or V, après quatre ans de géométrie, a retenu que les parallèles se coupent à l'infini. Effet rails de train? Il imagine même que deux d'entre elles puissent se couper avant de rencontrer la troisième, tout ceci à l'infini. Chez V, le géométrique est encore asservi au perceptif. S'il dispose d'un important répertoire de règles et de définitions géométriques, il ne sait pas comment l'utiliser. Mais lorsqu'il entre sérieusement dans la perspective de St, ce répertoire lui fournit rapidement tous les moyens d'être convaincu.

Le processus par lequel les élèves du groupe parviennent à un accord est complexe et les arguments donnés ne sont pas tous du même ordre. Il nous a paru intéressant de relire ce processus en utilisant le modèle proposé par Latour (1995). Dans ce modèle, les faits scientifiques se construisent socialement, tous les éléments de contexte pouvant intervenir en tant qu'alliés du promoteur du fait, les alliés pouvant être tant humains que non humains. C'est bien ainsi que St parvient à ses fins. Les dessins que tracent ses camarades, le tracé sur feuille d'acétate du maître ne sont pas ses alliés dans un premier temps. Elle arrive personnellement à un seul point, mais elle ne sait pas pourquoi; elle interprète cela comme un échec didactique, le professeur ayant, lui, obtenu un triangle. Le tournant se situe lorsque l'observateur demande ce qui est le plus étonnant et se met à rire. Cette intervention permet donc à St d'insister et de se faire un autre allié, V, qui apporte avec lui d'autres alliés, le cercle circonscrit et un élément de mémoire didactique: on vient de travailler ce point lors d'un cours précédent. Ces alliés ne suffisent pas encore pour persuader N qui doit refaire une construction très contrôlée (un crayon hypertaillé, dit-elle) pour se convaincre et Sd n'a plus d'argument à opposer à ses camarades. L'intersection des médiatrices d'un triangle peut donc être une boîte noire[9] dans la classe lorsqu'on admet le résultat sans discuter pour établir d'autres résultats ou simplement pour construire le cercle circonscrit. En posant la question pour faire exister le triangle A'B'C', la boîte noire s'ouvre et elle laisse échapper diverses conjectures alternatives et plausibles.

Conclusion

Grâce à la recherche dont nous venons de présenter quelques éléments, nous voulons approfondir l'analyse de certains problèmes clés de l'enseignement de la géométrie. Nous avons pu observer combien il est difficile, pour certains élèves, de se défaire du contexte graphique et nous avons pu mesurer ainsi les effets d'un enseignement fondé sur une pratique graphique avec un contrôle avant tout perceptif. En effet, l'étude du manuel actuellement utilisé à Genève, ainsi que celle de quelques manuels français montrent la prédominance d'un point de vue inductif. La plupart des propriétés géométriques sont établies sur la base d'observations empiriques. Ceci conduit à un aplatissement de la géométrie enseignée puisqu'on ne distingue plus certaines propriétés comme des axiomes à partir desquels on déduit d'autres propriétés. L'élève peut se satisfaire d'une position contractuelle dans laquelle ce n'est pas la mémorisation des définitions et des théorèmes géométriques qui importe, mais la construction graphique et la lecture de propriétés sur le dessin. Les enquêtes, menées à la fin de la scolarité obligatoire, ont fourni une confirmation expérimentale de cette assertion. Sans aller jusqu'à proposer le retour à un exposé de type euclidien, nous pouvons nous demander dans quelle mesure une plus forte structuration de la géométrie dans les manuels ne favoriserait pas ce passage à l'abstraction qui ne se fait pas tout seul chez beaucoup d'élèves. Pour appuyer cette thèse, signalons le rôle moteur des élèves de la classe observée, élèves qui proviennent d'un canton où l'enseignement de la géométrie est basé sur un manuel fortement structuré (Floris, 1996).

C'est en perturbant quelque peu le système didactique que l'on parvient à étudier certaines de ses potentialités d'évolution. C'est ce que nous avons fait avec la mise en place d'une activité basée sur une rupture de contrat en prenant comme modèle une situation étudiée par Brousseau. Lorsque les élèves sont plongés dans une pratique graphique sans issue, les contraintes de la situation les amènent à chercher des moyens intellectuels pour s'en sortir, avec l'intervention de l'adulte dans le cas étudié, mais aussi en utilisant des éléments de savoir précédemment enseignés, qui prennent ainsi un sens nouveau. Dans ce sens, et pour trois élèves au moins, le problème semble pouvoir être modélisé comme situation fondamentale au sens de Brousseau, avec l'utilisation, pour la résolution d'un problème, de connaissances apprises de façon scolaire. Berthelot et Salin (1992) ont analysé ce type de rapports, dits de modélisation, et ils ont montré la place qu'ils pouvaient tenir entre la position empirique de l'élève et la position théorique du mathématicien. Nous pensons, comme ces auteurs, qu'une consolidation de cette place peut contribuer à renforcer la signification des connaissances géométriques. C'est dans cette perspective que nous situons les recherches que nous menons sur les contraintes et sur les variables qui déterminent certains problèmes géométriques.

À moyen ou à long terme, ces recherches pourront donner lieu à l'élaboration de séquences d'enseignement. Deux facteurs limitent en effet leur portée pédagogique. Il s'agit tout d'abord de déterminer la reproductibilité et la robustesse de la situation expérimentée. Sous quelles autres conditions et dans quels types de classe obtient-on des effets semblables? Ensuite, étant donné le rôle essentiel du professeur, quelle formation doit-on apporter à ce dernier afin de lui permettre de contrôler le déroulement de la situation sans en modifier le sens?

Notes

1. Cet article présente un travail de recherche mené au sein de l'équipe de didactique du professeur Jean Brun et à l'occasion d'un travail de diplôme mené sous sa direction (Floris, 1996).

2. Ce n'est pas tout à fait exact puisque dans le manuel officiel de la sixième année primaire, en Suisse romande, le neuvième thème, intitulé «Surfaces et solides» débute avec une série d'illusions d'optique concernant le parallélisme et la perpendicularité (Chastellain *et al.*, 1985). On demande même de vérifier avec la règle et l'équerre. À notre avis, loin de remettre en cause la perception, ce genre d'activité peut la renforcer sur le mode de «voici l'exception qui confirme la règle».

3. Au programme de la sixième en France. À la charge du maître à Genève où le manuel de septième année s'appuie sur une présentation perceptive.

4. Dans sa thèse, Fregona (1995) étudie cette question du parallélisme et décrit l'expérimentation d'une situation de formulation.

5. En première année du Collège de Genève, nom du lycée genevois fondé par Jean Calvin.

6. On pourrait aussi se demander comment le centre de recherche de l'institution «cycle d'orientation» ne s'est pas rendu compte que «l'apprentissage» de la géométrie ne semblait pas se faire comme il le décrit. Au niveau secondaire supérieur, l'institution en aval en a pris conscience puisque la «géométrie élémentaire» figure au programme de sa première année avec notamment une reprise complète de l'étude des transformations géométriques normalement prévue l'année précédente.

7. Et non au cycle d'orientation comme semblent le croire les auteurs du texte de Pini *et al.* (1993) cité dans la section précédente.

8. Dans Floris (1996), nous en donnons une description.

9. Une boîte noire est, dans le modèle de Latour, une théorie ou une machine qui n'est plus remise en discussion.

Abstract – This article presents an exploratory study on geometry teaching in the context of formal schooling and on its long term effects. The author presents an analysis, based on the concept of situation, of the various presentations of a geometry concept: the parallel of two straight lines, as presented in both old and new school texts and at various grades. The author compares the results of an experiment presented to 20 secondary level students who were asked to solve problems in a empirical way with those results obtained from a theoretical treatment. These results show that, in a non-prototypical context, students do not use what they have learned without help.

Resumen – Este artículo presenta un estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría dentro de la escolaridad obligatoria y sobre sus efectos a largo plazo. Se analizan primero, a partir del concepto de situación, diferentes presentaciones de un concepto geométrico: el paralelismo de dos rectas, en manuales antiguos, y nuevos y en diferentes niveles escolares. Después se comparan los resultados de una experiencia con 20 alumnos de un liceo, que habían tratado estos problemas de forma empírica, con los resultados obtenidos con un tratamiento teórico. Los resultados de la clase muestran que, dentro de un contexto atípico, los alumnos no llegan a utilizar sin ayuda lo que habían aprendido.

Zusammenfassung – Der vorliegende Artikel berichtet über eine Untersuchung des Geometrieunterrichts als Pflichtfach und dessen Wirkung über längere Zeit hin. Zunächst werden, ausgehend vom Begriff der Situation, verschiedene Darstellungen eines geometrischen Grundsatzes – die Parallelität zweier Geraden – in älteren und neuen Schulbüchern verschiedener Klassenstufen analysiert. Daraufhin werden die Ergebnisse eines Experiments, bei dem zwanzig Gymnasiasten die Aufgaben empirisch studieren mußten, mit den auf theoretische Weise erzielten Ergebnissen verglichen. Aus den Ergebnissen der Klasse geht hervor, daß es den Schülern bei nicht urtypischen Verhältnissen nicht gelingt, das, was sie gelernt haben, ohne Hilfe auch anzuwenden.

RÉFÉRENCES

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(6), 267-312.

Arsac, G. (1994). Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie – Vérification et démonstration. *Petit x, 37*, 5-33.

Arsac, G. et Mante, M. (1988). Le rôle du professeur. *In Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique (1988-1989)* (p. 79-105). Grenoble: Institut Fourier.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Lyon: IREM de Lyon et Presses universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Barbin, E. (1993). La pensée mathématique dans l'histoire et dans la classe. *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 388*, 136-156.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat, Laboratoire aquitain de didactique des sciences et des techniques, Université de Bordeaux I.

Bertrand, L. (1890). *Leçons de géométrie élémentaire.* Genève: Taponnier et Studer.

Bertrand, L. (1934). *Éléments de géométrie.* Lausanne: Payot.

Bevacqua, G. et Floris, R. (1989). Development and classroom experimentation of interactive geometry exercices. *Journal of Computer Assisted Learning, 5*, 161-176.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1987). Didactique des mathématiques et questions d'enseignement: proposition pour la géométrie. *Les sciences de l'éducation, 1*(2), 69-100.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309-336.

Centeno, J. (1995). La mémoire didactique de l'enseignant. Thèse posthume inachevée, Laboratoire aquitain de didactique des sciences et des techniques, Université de Bordeaux I.

Chastellain, M., Jaquet, F. et Michlig, Y. (1985). *Mathématique – Sixième année.* Genève: Office romand des éditions et du matériel scolaires, Economat Cantonal.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. et Jullien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège – Première partie. *Petit x, 27*, 41-76.

Corbaz, A. (1901). Exercices et problèmes de géométrie et de toisé à l'usage des écoles primaires. Genève: Eggimann.

Corbaz, A. (1926). *Géométrie* (4e éd.). Genève: Atar.

Cycle d'orientation de l'enseignement secondaire (1991). *Mathématiques 7e – Géométrie.* Genève: Département de l'instruction publique du canton de Genève.

De Block-Docq, C. (1992). *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'âge de douze ans.* Thèse de doctorat, Faculté des sciences, Université de Louvain-La-Neuve.

Euclide (1990). *Les éléments* (B. Vitrac, Trans.). Paris: Presses universitaires de France.

Floris, R. (1995). La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique? Quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *Petit x, 39*, 29-53.

Floris, R. (1996). *Qui a tué la géométrie à l'école? Enquête didactique, de la noosphère à la classe.* Travail de diplôme d'éducation supérieure, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.

Floris, R., Brun, J. et Leutenegger, F. (1994). Structuration du milieu et analyse de protocoles. *In* J. Brun et F. Conne (dir.), *L'analyse de protocoles entre didactique des mathématiques et psychologie cognitive* (p. 78-84). Comptes rendus des premières journées didactiques de La Fouly. Neuchâtel: Cahiers du Groupe des chercheurs romands, Institut roman de documentation pédagogique.

Floris, R., Gruner, C. et Rochat, J. (1991). *GEMAO: géométrie et enseignement des mathématiques avec l'aide de l'ordinateur.* Manuel et disquettes MS-DOS. Genève: Dispositif de recherche du Département de l'instruction publique du canton de Genève.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXII*, 1-74.

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme «milieu» dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de doctorat, Laboratoire aquitain de didactique des sciences et des techniques, Université de Bordeaux I.

Gonseth, F. (1945). *La géométrie et le problème de l'espace.* Neuchâtel: Éditions du Griffon.

IREM-Strasbourg (1986). *Mathématiques 6e.* Paris: Casteilla.

Latour, B. (1995). *La science en action.* Paris: Gallimard (1re éd. anglaise 1987, Harvard University Press).

Legrand, M. (1990). «Circuit» ou les règles du débat mathématique. *In* Commission inter-IREM-Université (dir.), *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (p. 129-162). Lille: Institut de recherche en mathématiques.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1994). Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. *In Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble (1993-1994)* (p. 27-83). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* Thèse de doctorat, Laboratoire aquitain de didactique des sciences et des tecniques, Université Bordeaux I. Publiée par l'IREM d'Aix-Marseille.

Mercier, A. (1994). Le milieu et la dimension adidactique de la relation didactique. *In* J. Brun et F. Conne (dir.), *L'analyse de protocoles entre didactique des mathématiques et psychologie cognitive* (p. 1-19). Comptes rendus des premières journées didactiques de La Fouly. Neuchâtel: Cahiers du Groupe des chercheurs romands, Institut romand de documentation pédagogique.

Mercier, A. et Tonnelle, J. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège – Deuxième partie: vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace. *Petit x, 29*, 15-56.

Mercier, A. et Tonnelle, J. (1992). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège – Troisième partie: premières études didactiques de questions d'enseignement. *Petit x, 33*, 3-35.

Noirfalise, R. (1993). Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 229-256.

Pini, G., Lorenz, G. et Emery, A. (1993). *Connaissances des élèves en géométrie à la fin du cycle d'orientation.* Genève: Centre de recherches psychopédagogiques du cycle d'orientation.

Portugais, J. (1992). Didactique et formation des enseignants, le cas des erreurs de calcul. *In Séminaire DiDaTech n° 140* (p. 235-252). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Verkerk, H. (1990). *Du dessin au concept de figure: évidence du dessin et argumentation dans le cas du triangle aplati.* Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon I.